

FRAÇÕES CONTINUADAS. O CASO INFINITO.

FERNANDO FERREIRA

Definição 1. Dado $a_0 \in \mathbb{R}$ e a_1, a_2, a_3, \dots uma sucessão de números reais positivos, definem-se por recorrência as duas seguintes sucessões: $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$ e, para $n \geq 2$,

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Também $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ e, para $n \geq 2$,

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Tem-se o seguinte Facto (6): para todo o inteiro não negativo n , $q_n > 0$. No caso simples (em que as entradas são número inteiros), tem-se o Facto (7): $q_n < q_{n+1}$ para todo o número natural n . Daqui sai facilmente que, $n \leq q_n$ para todo o inteiro não negativo n .

Proposição 1. Para todo o inteiro não negativo n , $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Demonstração. Por indução em n . Os casos $n = 0$ e $n = 1$ são de verificação trivial. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Por definição,

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}].$$

Se considerarmos os pês e quês da definição acima (até ao índice n) da fração continuada do lado direito desta igualdade tem-se, por hipótese de indução,

$$\frac{p_n^*}{q_n^*} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}],$$

onde escrevemos p_k^* e q_k^* para os pês e os quês acima referidos. Vem, por definição,

$$\frac{p_n^*}{q_n^*} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1}^* + p_{n-2}^*}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1}^* + q_{n-2}^*} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}},$$

pois, obviamente, $p_{n-1}^* = p_{n-1}$, $p_{n-2}^* = p_{n-2}$, $q_{n-1}^* = q_{n-1}$ e $q_{n-2}^* = q_{n-2}$. Multiplicando o numerador e o denominador por a_{n+1} , ficamos com

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] &= \frac{a_{n+1} a_n p_{n-1} + p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{a_{n+1} a_n q_{n-1} + q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} = \\ &= \frac{a_{n+1} (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \end{aligned}$$

como se queria. □

Proposição 2. Nas condições da definição acima, tem-se:

- (a) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$, para todo o natural n ;
- (b) $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$, para todo o natural n com $n \geq 2$.

Observação. Os factos (a) e (b) acima podem ser reformulados da seguinte maneira:

- (a') $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$, para todo o natural n ;
- (b') $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = (-1)^n \frac{a_n}{q_n q_{n-2}}$, para todo o natural n com $n \geq 2$.

Demonstração. A primeira alínea demonstra-se facilmente por indução em n . A verificação do caso $n = 1$ é óbvia. E

$$\begin{aligned} p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} &= (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n - p_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) = \\ &= a_{n+1}p_nq_n + p_{n-1}q_n - p_na_{n+1}q_n - p_nq_{n-1} = p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n. \end{aligned}$$

A última igualdade justifica-se pela hipótese de indução.

A segunda alínea demonstra-se diretamente:

$$\begin{aligned} p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) = \\ &= a_np_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-2} - p_{n-2}a_nq_{n-1} - p_{n-2}q_{n-2} = a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) = a_n(-1)^n, \end{aligned}$$

em que a última igualdade se justifica pela primeira alínea. \square

No caso da fração continuada ser simples, a alínea (a) mostra o Facto (8) de que $p_n \perp q_n$. Ainda no caso simples, costuma denotar-se por c_n o número racional $\frac{p_n}{q_n}$: o denominador n -ésimo convergente. Tem-se o seguinte Facto (9): $c_0 < c_2 < c_4 < c_5 < \dots$ e $\dots < c_7 < c_5 < c_3 < c_1$. Isto é uma clara consequência da observação (b').

Lema 1. Para k e r inteiros não negativos, $c_{2k} < c_{2r+1}$.

Demonstração. Se $k \leq r$, vem $c_{2k} \leq c_{2r} < c_{2r+1}$. A segunda desigualdade sai imediatamente da observação (a'). Se $r < k$, tem-se $c_{2k} < c_{2k+1} < c_{2r+1}$. A observação (a') também justifica a primeira desigualdade. \square

A situação é a seguinte. Os convergentes pares crescem estritamente e são menores do que os convergentes ímpares. É claro que os convergentes pares têm como limite o seu supremo θ_{sup} . Por sua vez, os convergentes ímpares decrescem estritamente e são maiores do que todos os convergentes pares. Estes convergentes ímpares têm como limite o seu ínfimo θ_{inf} . Tem-se a figura:

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots \rightarrow \theta_{\text{sup}} \leq \theta_{\text{inf}} \leftarrow \dots c_5 > c_3 > c_1$$

O próximo resultado mostra que a diferença entre os convergentes ímpares e os convergentes pares tende para zero e que, portanto, θ_{sup} e θ_{inf} são o mesmo número θ .

Proposição 3. Seja $a_0 \in \mathbb{Z}$ e a_1, a_2, a_3, \dots uma sucessão de números naturais. A sucessão dos convergentes

$$n \rightsquigarrow [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

tende para um determinado limite que se denota por $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Demonstração. Tem-se

$$|c_{n+1} - c_n| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \frac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}} \right| \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

onde estamos a utilizar (a) e o Facto (7). Daqui conclui-se que $\theta_{\text{sup}} = \theta_{\text{inf}}$ e que a sucessão dos convergentes c_n tem como limite este valor comum. \square

À figura $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ chama-se uma *fração continuada* (simples) *infinita*. Informalmente:

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Proposição 4. *Seja $\theta = [a_0, a_1, a_2, \dots]$, onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e a_1, a_2, a_3, \dots é uma sucessão de números naturais. Então, para todo o número natural n ,*

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Demonstração. Dado que θ está entre $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, tem-se

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2},$$

por (a) e o Facto (7). \square

Corolário 1. *O valor duma fração continuada (simples) infinita é um número irracional.*

Demonstração. Seja $\theta = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. Pela proposição anterior, há um número infinito de números racionais $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$) tais que

$$\left| \theta - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}.$$

Por um resultado duma secção anterior, θ é irracional. \square

Antes de terminarmos esta secção vamos estabelecer dois factos. O Facto (10) é o seguinte: para toda a fracção continuada (simples) infinita $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ e para todo o número natural k , tem-se

$$[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, \dots]]$$

Com efeito:

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots] &= \lim_n [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] = \\ &= \lim_n [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]] = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \lim_n [a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]] = \\ &= [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, \dots]]. \end{aligned}$$

A segunda igualdade justifica-se pelo Facto (3) e a igualdade seguinte justifica-se por continuidade, i.e., pelo Facto (4).

Seja θ o número irracional dado pela fração continuada simples infinita $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. Para cada inteiro não negativo n , seja $\theta_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$. Pelo Facto (10), tem-se que θ é $[a_0, \dots, a_{n-1}, \theta_n]$ (em particular, $\theta = \theta_0$). A fração $[a_0, \dots, a_{n-1}, \theta_n]$ é uma fração continuada *finita*, mas não é simples (por causa da última entrada θ_n). A Proposição 1 aplica-se a esta fração, obtendo-se (para $n \geq 2$)

$$\theta = \frac{p_n^*}{q_n^*} = \frac{\theta_n p_{n-1}^* + p_{n-2}^*}{\theta_n q_{n-1}^* + q_{n-2}^*} = \frac{\theta_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\theta_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

pois, obviamente, $p_{n-1}^* = p_{n-1}$, $p_{n-2}^* = p_{n-2}$, $q_{n-1}^* = q_{n-1}$ e $q_{n-2}^* = q_{n-2}$ (os pês e os quês estrelas são os pês e os quês da fração $[a_0, \dots, a_{n-1}, \theta_n]$, enquanto os meros pês e quês são os da fração $[a_0, a_1, a_2, \dots]$). O Facto (11) é o seguinte:

$$\theta = \frac{\theta_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\theta_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$